

# Taller de resolución de problemas

## $\pi$ -ensa

### Séptima Sesión

03 de Abril de 2017

1. Las raíces de la ecuación  $x^3 - 3x^2 + kx + 8 = 0$ , tomadas en determinado orden, están en progresión aritmética. Hallar las raíces y el valor del coeficiente  $k$ .
2. Sea  $C$  una circunferencia de diámetro  $26\text{ cm}$ , se traza una cuerda de la circunferencia a  $5\text{ cm}$  del centro, ¿Cuál es la longitud de la cuerda?
3. Los extremos de la base de un triángulo son los puntos  $A = (0, 0)$  y  $B = (3, 0)$ . Hallar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto  $C$  si se mueve de tal manera que el ángulo  $CAB$  es siempre igual al doble del ángulo  $CBA$ .
4. Utilizar inducción matemática para demostrar que para cada entero  $n \geq 2$  se cumple que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

5. Encuentra el valor de la siguiente integral:

$$\int_{-4}^4 [|4 - x|] dx$$

donde  $[x]$  denota el menor entero mayor o igual que  $x$ .

6. Prueba que si  $P$  es un pentágono, existen un par de ángulos interiores consecutivos de  $P$  cuya suma de medidas es al menos  $216^\circ$ .
7. El polinomio  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$  satisface que  $P'(\frac{1}{2}) = -\frac{21}{4}$ . ¿Cuál es el valor de  $\frac{P(1)+P'''(0)}{2}$ ?
8. Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos ajenos del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, m\}$  y la suma de los elementos de  $A$  es igual a la suma de los elementos de  $B$ , pruebe que el número de elementos de  $A$  y también de  $B$  es menor que  $\frac{m}{\sqrt{2}}$ .
9. Determine para que enteros positivos  $n$ ,  $2^n - 1$  es divisible por 7.
10. Si hay tres bolas blancas y tres bolas negras en una urna y se sacan tres bolas (de una en una y sin regresarlas), ¿cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas?